УДК 667.64:678.026

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТАНТ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИМ ИСПЫТАНИЕМ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ

## Алексенко В.Л., Скирденко В.О., Шварц С.С.

Херсонская государственная морская академия

Разработан динамический способ определения упругих констант призматических образцов материала. Способ применим для образцов незначительных параметров, когда традиционные методы и оборудование становятся неудобными. На основе разработанного метода определены динамический и статический модули Юнга эпоксидных композитов.

Ключевые слова: динамический и статический модули Юнга, эпоксидные композиты, механические константы, метод.

Введение. В основе целой группы способов экспериментального определения механических констант материалов лежит сравнение частот собственных колебаний упругих систем, найденных расчётом и определённых экспериментально [1]. Образцы материала обычно имеют форму призм и цилиндров, часто относительно коротких. Основные стандарты [2, 3] рассматривают так называемые нормальные образцы с диаметром d ≥ 3 мм, а остальные относят к *микрообразцам*. Однако опыт работы с образцами, у которых больший из поперечных размеров (h) лежит в пределах  $0, 1 \le h \le 3$  мм свидетельствует о необходимости выделения этого класса материалов в отдельную промежуточную группу миниатюрных. Название группы и границы диапазона размеров остаются предметом обсуждения. Первая и последняя из отмеченных размерных групп образцов характеризуются общими подходами и методами проведения экспериментов. Для возбуждения в этих образцах колебаний удобно использовать соленоид, питаемый низкочастотным генератором. Резонансные частоты, совпадающие с частотами собственных колебаний, надёжно регистрируются по резкому возрастанию амплитуд колебаний. Если образец изготовлен из немагнитного материала, то к нему крепят якорь из магнитомягкого материала. Якорь снижает низшую собственную частоту, что представляет самостоятельный интерес при планировании экспериментов. Если метод основан на измерении параметров изгибных колебаний, то расчётное определение собственных частот, являющихся функциями механических констант, как правило, базируется на технической теории изгиба стержней. Приемлемые результаты следует ожидать, если длина одной полуволны формы рассматриваемого колебания в несколько раз превышает размер образца в плоскости колебаний. Учёт деформаций сдвига и инерции поворотов масс позволяют несколько уточнить результаты расчётов [4].

Состояние вопроса. Как будет показано ниже, определение собственных частот для призматических балок не представляет принципиальных затруднений и следует ожидать, что результаты таких решений должны быть отображены в многочисленных справочных пособиях [5-8]. На рис. 1 изображён отсканированный в натуральную величину фрагмент справочной таблицы для консоли с сосредоточенной массой на конце [5], заимствованный из ставшего библиографической редкостью справочника [6]. В источниках [7, 8] эти графики в ещё более мелком масштабе просто тиражируются (рис. 2). Точность представленных этими графиками данных для целей исследований недостаточна, влияние сдвигов не учитывается. При этом уравнение частот, из которого пользователь указанных программ и персонального компьютера извлёк бы интересующую его информацию, отсутствует.

**Цель разработки** – уточнить решение задач теории колебаний с практическим приложением к задачам определения механических констант материалов и разработки соответствующего программного обеспечения.

Учёт сдвига при изгибе. Техническая теория поперечного изгиба балок содержит определённые внутренние противоречия, обусловленные гипотезой плоских сечений. Это проявляется при определении перемещений как у относительно коротких образцах, так и у балок с широким развитием поясков, например в составе судовых конструкций типа двойного дна или бортов. Это обстоятельство, в частности, предусматривает разную минимальную относительную длину образцов при определении модуля Юнга путём испытания на изгиб по так называемым *трёх-* и *четырёхточечным* схемам [3] и связано с влиянием деформаций сдвига.





Рисунок 1 – Графики для определения характеристических чисел α<sub>i</sub>[5] консольной балки с сосредоточенной массой на конце



Задача об изгибе балок с учётом сдвига всегда привлекала внимание специалистов в строительной механике корабля и достаточно подробно рассмотрена в работах [9, 10]. Полные перемещения в балке рассматриваются как сумма двух составляющих:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x); \ u(x) = u_1(x) + u_2(x);$$
  

$$w'(x) = w'_1(x) + w'_2(x); \ \alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) = w'_1(x) + \alpha_2(x),$$
(1)

где u(x) и w(x) – перемещения вдоль продольной оси балки 0X и вертикальной 0Z соответственно, w'(x) и a(x) – угол поворота продольной оси и поперечного сечения. Здесь и далее нижний индекс 1 означает изгибную составляющую, а 2 – сдвиговую; верхний штрих означает дифференцирование по x, а точка сверху – по времени t. Различие между  $w'_2(x)$  и  $a_2(x)$  в последней из формул (1) является следствием *депланации* поперечных сечений. В результате для двух составляющих перемещений при поперечном изгибе получают соответствующие дифференциальные уравнения:

$$EI(x)w_1''(x)) '' = q(x); w_2'(x) = a_2(x) - Q(x)/G\omega(x).$$
<sup>(2)</sup>

Здесь  $\omega = A/k$  – часть площади A поперечного сечения балки, сопротивляющаяся средним касательным напряжениям (для широкополой балки – площадь стенки). Коэффициент k рекомендуется определять по формуле [11]:

$$k = \frac{A}{I_{y}^{2}} \int_{(A)} \frac{S_{y}^{2}}{b(z)^{2}} dA,$$
(3)

где  $S_y$  – статический момент площади поперечного сечения по одну сторону от слоя z=const относительно главной центральной оси 0Y; b(z) – текущая ширина этого слоя;  $I_y$  – осевой момент инерции площади поперечного сечения. В частности, для прямоугольного поперечного сечения k=1,2.

*Е* и *G* – модули первого и второго рода; *Q* и *q* – поперечная сила и интенсивность поперечной нагрузки, связанные дифференциальной зависимостью:

$$dQ(x)/dx = q(x). \tag{4}$$

Ограничившись призматическими балками и продифференцировав по *x* второе из уравнений (2) с учётом (3) получим:

$$EI w_{1}^{W}(x) = q(x); G\omega w''_{2}(x) = -q(x).$$
(5)

Свободные колебания с учётом сдвига. При свободных колебаниях стержня функцию распределённой нагрузки выполняют силы инерции:

$$EI w_{1}^{IV}(x) = q(x); G\omega w_{2}^{\prime\prime}(x) = -q(x).$$
(5)

$$q = -m\ddot{w}.$$
 (6)

где *т* – погонная масса.

Подставляя (6) в (5) и приняв во внимание (1) получим:

$$EI w^{IV}_{l} + m(\ddot{w}_{l} + \ddot{w}_{2}) = 0;$$
  

$$G\omega w''_{2} - m(\ddot{w}_{l} + \ddot{w}_{2}) = 0.$$
(7)

Решение (7) ищем в форме:

$$w_{in} = X_{in}(x) \sin(\lambda_n t + \varepsilon), \ i = 1, 2.$$
(8)

Подставляя (8) в (7) получим:

$$EI X^{IV}{}_{In} + m\lambda^{2}{}_{n}(X_{In} + X_{2n}) = 0; (9)$$

$$G\omega X''_{2n} - m\lambda^2_n (X_{1n} + X_{2n}) = 0$$
(10)

Учитывая зависимости:

$$Q' = EI w^{IV}_{I}$$
и  $Q = G\omega w'_{2}$ 

имеем:

$$G\omega X''_{2n} = - EI X^{IV}_{1n}.$$

Интегрируя дважды, найдём:

$$X_{2n} = -\frac{EI}{G\omega}X_{1n}^{"} + \alpha_1 + \beta_1 x, \qquad (11)$$

где  $\alpha_1, \beta_1$  – постоянные интегрирования.

Подставляя (11) в первое из уравнений (7) и исключив из него тем самым функцию *X*<sub>2</sub>, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$X_{1n}^{IV} + \frac{m\lambda^2}{G\omega} X_{1n}^{"} - \frac{m\lambda^2}{EI} X_{1n} = \alpha_2 + \beta_2 x.$$
(12)

Корни характеристического уравнения которого:  $\kappa_{1,2} = \pm j_n$ ,  $\kappa_{3,4} = \pm i\mu_n$ , где:

$$j_n = \lambda_n \left[ -\frac{m}{2G\omega} + \sqrt{\left(\frac{m}{2G\omega}\right)^2 + \frac{m}{\lambda^2 EI}} \right]^{\frac{1}{2}}; \ \mu_n = \lambda_n \left[ \frac{m}{2G\omega} + \sqrt{\left(\frac{m}{2G\omega}\right)^2 + \frac{m}{\lambda^2 EI}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$
 (13)

Частное решение имеет ту же форму, что и правая часть (последнее слагаемое, учитывающее смещение балки как твёрдого тела). Следовательно:

$$X_{1n} = C_{0n} chj_n x + C_{1n} shj_n x + C_{2n} cos\mu_n x + C_{3n} sin\mu_n x - (B_{0n} + B_{1n} x).$$
(14)

Подставляя (14) в (11) получим:

$$X_{2n} = B_{0n} + B_{1n}x - (EI)/(G\omega) [j^2_n(C_{0n}chj_nx + C_{1n}shj_nx) - \mu^2_n(C_{2n}cos\mu_nx + +C_{3n}sin\mu_nx)].$$
(15)

Тогда:

$$X_{n} = B_{0n} + B_{1n}x + [1 - (EI/G\omega) j^{2}_{n}](C_{0n}chj_{n}x + C_{1n}shj_{n}x) + [1 + (EI/G\omega) \mu^{2}_{n}](C_{2n}cos\mu_{n}x + C_{3n}sin\mu_{n}x),$$
(16)

где постоянные  $C_{0n}$ ,  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$ ,  $C_{3n}$  находят из граничных условий.

Собственные колебания весомой призматической консольной балки с сосредоточенной массой на свободном конце. Поскольку связи, наложенные на консольную балку (рис. 3), исключают её перемещения как твёрдого тела, то в решении (16):  $B_0 = B_1 = 0$ .



Рисунок 3 – Консольная балка с сосредоточенной массой  $M_p$  на свободном конце

Для определения постоянных  $C_{in}$  (*i*=0,1,2,3) в части решения определяющей упругую составляющую перемещений используем два кинематические граничные условия на левом конце балки:

$$w(0,t) = 0; w'(0,t) = 0$$
 (17a)

и два силовых на правом:

$$w''_{l}(l,t) = 0; EIw'''_{l}(0,t) = M_{p} \ddot{w}(l,t).$$
 (176)

Здесь *М*<sub>*p*</sub> – сосредоточенная масса (якорь) на конце консоли.

С учётом формы решения (13) краевые условия принимают вид:

$$X(0) = 0; X'(0) = 0; X''_{1}(l) = 0; EIX'''_{1}(l) = -M_{p}\lambda_{n}^{2}X(l).$$
(18)

Подставив (14) и (16) в (18) получим систему однородных линейных уравнений относительно  $C_{in}$ :

$$a_{00}{}^{(n)}C_{0n} + a_{02}{}^{(n)}C_{2n} = 0; a_{11}{}^{(n)}C_{1n} + a_{13}{}^{(n)}C_{3n} = 0;$$
  

$$a_{20}{}^{(n)}C_{0n} + a_{21}{}^{(n)}C_{1n} + a_{22}{}^{(n)}C_{2n} + a_{23}{}^{(n)}C_{3n} = 0;$$
  

$$a_{30}{}^{(n)}C_{0n} + a_{31}{}^{(n)}C_{1n} + a_{32}{}^{(n)}C_{2n} + a_{33}{}^{(n)}C_{3n} = 0,$$
  
(19)

где

$$a_{00}^{(n)} = 1 - \frac{EI}{G\omega} j_n^2; \ a_{02}^{(n)} = 1 + \frac{EI}{G\omega} \mu_n^2; \ a_{11}^{(n)} = j_n a_{00}^{(n)}; \ a_{13}^{(n)} = \mu_n a_{02}^{(n)}; \ a_{20}^{(n)} = j_n^2 ch(j_n l) a_{00}^{(n)}; a_{21}^{(n)} = j_n^2 sh(j_n l) a_{00}^{(n)}; \ a_{22}^{(n)} = -\mu_n^2 \cos(\mu_n l) a_{02}^{(n)}; \ a_{23}^{(n)} = -\mu_n^2 \sin(\mu_n l) a_{02}^{(n)};$$
(20)

$$a_{30}^{(n)} = j_n^3 sh(j_n l) + \frac{M_p \lambda_n^2}{EI} a_{00}^{(n)} ch(j_n l); \quad a_{31}^{(n)} = j_n^3 ch(j_n l) + \frac{M_p \lambda_n^2}{EI} a_{00}^{(n)} sh(j_n l);$$
  
$$a_{32}^{(n)} = \mu_n^3 \sin(\mu_n l) + \frac{M_p \lambda_n^2}{EI} a_{02}^{(n)} \cos(\mu_n l); \quad a_{33}^{(n)} = -\mu_n^3 \cos(\mu_n l) + \frac{M_p \lambda_n^2}{EI} a_{02}^{(n)} \sin(\mu_n l).$$

Система (19) имеет тривиальное решение  $C_{in}=0$  (i=0,1,2,3), что означает отсутствие движения. Условием существования ненулевых решений является равенство определителя этой системы нулю.

$$Det = \begin{vmatrix} a_{00}^{(n)} & 0 & a_{02}^{(n)} & 0 \\ 0 & a_{11}^{(n)} & 0 & a_{13}^{(n)} \\ a_{20}^{(n)} & a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} \\ a_{30}^{(n)} & a_{31}^{(n)} & a_{32}^{(n)} & a_{33}^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$
(21)

Разворачивая определитель (21) получаем *уравнение частот* относительно неизвестных *собственных частот*  $\lambda_n$  колебаний балки:

$$f(\lambda_n) = \left(a_{22}^{(n)} - \frac{a_{20}^{(n)}a_{02}^{(n)}}{a_{00}^{(n)}}\right) \left(a_{33}^{(n)} - \frac{a_{31}^{(n)}a_{13}^{(n)}}{a_{11}^{(n)}}\right) - \left(a_{32}^{(n)} - \frac{a_{30}^{(n)}a_{02}^{(n)}}{a_{00}^{(n)}}\right) \left(a_{23}^{(n)} - \frac{a_{21}^{(n)}a_{13}^{(n)}}{a_{11}^{(n)}}\right) = 0.$$
(22)

Замечания об основных формах решения частотного уравнения. Полученное трансцендентное уравнение (22) может быть разрешено относительно любого параметра, когда остальные заданы.

В настоящем исследования интерес представляют две основные задачи. Первая, обычно рассматриваемая в литературе по теории колебаний задача, назовём её *прямой*, заключается в определении собственных частот  $\lambda_n$ , которые, как известно, образуют бесконечную последовательность. Из этой последовательности практический интерес, как правило, представляют лишь первые 2-3 реже – до 5 гармоник, так как решение задачи, где образец закреплён в виде балки достаточно точно описывает напряжённодеформированное состояние, пока полуволна формы колебания в несколько раз превышает размер (высоту) балки в плоскости колебаний. Следовательно, чем больше относительная длина балки, тем больше частот собственных колебаний с приемлемой для практики точностью можно определить. Поскольку корни частотного уравнения (22) нельзя найти аналитически, необходимо воспользоваться одним из численных методов, ориентированных на современную вычислительную технику [12]. Здесь необходимо решить две проблемы: локализации корней и подбора подходящего метода их уточнения в каждом интервале заключающем корень.

Обратная задача заключается в следующем. Пусть для заданной балки известны несколько собственных частот  $\lambda_n$ , например, определённых экспериментально. Необходимо найти один из её неизвестных параметров, входящих в частотное уравнение непосредственно или через известную связь с другими. Так значительный интерес для материаловедов представляет определение механических констант конструкционных материалов одним из динамических способов [1], например, модуля Юнга *E*. Эта задача с вычислительной точки зрения не отличается от предыдущей. Поскольку уравнение (2) нелинейно относительно *E*, в результате вычислений будет получен ряд значений *E* ограниченный физически нулём и модулем наиболее жёсткого из известных в природе материалов – алмаза. Поэтому в данном случае также возникает проблема выделения единственного корня *E*, например сравнением с определёнными другими методами. Окончательно правильность выделения проверяется решением прямой задачи и сопоставлением вычисленных собственных частот с экспериментальными.

Алгоритм и программы решения прямой и обратной задач для частотного уравнения. Для численного решения прямой и обратной задач для частотного уравнения (22) разработаны программы на языке программирования Pascal ABC. Локализация и уточнение корней в том и другом случаях выполняются одинаково. Для выделения корней применяется сканирование исследуемого интервала с постоянным достаточно малым шагом, величина которого подбирается путём численных экспериментов. Если на границах локального интервала функция имеет разные знаки, то это свидетельствует о наличии в нём, по крайней мере, одного корня. После чего следует процедура сужения этого интервала до момента, когда его длина станет меньше заданной точности определения корней. Для уточнения корней использован метод *половинного деления*, обладающий гарантированной сходимостью. Решение частотного уравнения (22) относительно  $\lambda_n$  выполняется с помощью программы *consolE* предполагаемых значений модуля *E*.

**Некоторые результаты решения прямой и обратной задач.** Ниже (табл. 1) приведен ряд результатов, полученных при тестировании программ *consolL* и *consolE*.

Таблица 1 – Результаты тестирования программ		
Массогабаритные параметры образца: $l = 0,1; b = 0,01; h = 0,002; ro = 7800; m = 0,156;$		
mu = 0,3;  Om = 1,66666666666666666666666666666666666		
Программа <i>consolL</i> для $E=2$ 10 <sup>11</sup> Па	Программа consolE для λ <sub>n</sub>	
$\lambda_1 = 338,592612838745$	$E_1 = 20000002845,764$	
$\lambda_2 = 4633,94769439697$	$E_2 = 199999989706,039$	
$\lambda_3 = 14714,9616409302$	$E_3 = 199999987802,506$	
$\lambda_4$ =30469,3702102661	$E_4 = 199999993706,055$	
$\lambda_5 = 51815, 8680130005$	$E_5 = 199999981845,703$	

Были произведены испытания образцов эпоксикомпозитов изготовленных на основе эпоксидной смолы ЭД-20 с содержанием 20 % наполнителей: железного сурика (ЖС), коллоидной серы (КС) и карбидной шихты (КбШ). В качестве отвердителя эпоксидной матрицы применялся полиэтиленполиамин (ПЭПА) в соотношении 1:10.

Испытания проводили на специально разработанной установке состоящей из генератора звуковой частоты, электромагнита, закреплённого в виде консоли исследуемого образца с сосредоточенной массой  $M_p$  на свободном конце и осциллографа, к которому подключён микрофон.

Предварительно определяли геометрические параметры образцов: длину (l), ширину (b) и толщину (h), а также на электронных весах с точностью до  $\pm 0,002$  гр измеряли их массу (m). Далее с помощью генератора и осциллографа, по резкому увеличению амплитуды колебаний, определяли первую резонансную частоту или ряд собственных частот, которые использовали при решении частотного уравнения (22) для получения предполагаемых значений модуля Юнга *E*.

Осциллограммы акустического излучения колебаний образца 1 принятые микрофоном в момент резонанса и подаваемого на электромагнит переменного тока 2 представлены на рис. 4.

Из осциллограммы следует, что частота возбуждённых колебаний равна удвоенной частоте колебаний генератора. Это обусловлено использованием якоря из магнитомягкого материала. Результаты проведённых исследований статического  $(E_{cm})$  и динамического  $(E_{d})$  модуля Юнга представлены в табл. 2.





Рисунок 4 – Осциллограммы колебаний образца 1 и колебаний генератора 2

Таблица 2 – Результаты испытаний динамического и статического модуля Юнга эпоксикомпозитов

Природа наполнителя	Модуль Юнга эпоксикомпозитов, ГПа	
(содержание – 20 мас.ч.)	Ecm	Eð
Матрица	2,98	2,54
ЖС	4,07	4,65
КС	3,98	2,46
КбШ	3,99	3,65

**Выводы**. Разработан динамический способ определения упругих констант призматических образцов материала. Способ применим для образцов незначительных параметров, когда традиционные методы и оборудование становятся неудобными.

Взамен неполных и недостаточно точных справочных данных приводимых в доступной литературе предложен программный комплекс, позволяющий решать прямую и обратную задачи для уточнённого частотного уравнения.

В дальнейшем планируется применить разработанную методику для исследования динамического модуля Юнга композитов с двухкомпонентным наполнителем.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патент РФ № 2431819, МПК G01N 3/32. Способ определения модуля упругости Юнга и коэффициента Пуассона литых деталей. – 2010.

2. ГОСТ 1497-84. Металлы. Методы испытаний на растяжение.

3. ГОСТ 9550-81. Пластмассы. Методы определения модуля упругости при растяжении, сжатии и изгибе.

4. Тулкина А. Н. Исследование свободных и вынужденных колебаний стержневой системы, содержащей нанообъект, на основе теории С. П. Тимошенко : автореф. дис...ции. / А. Н. Тулкина. – Санкт-Петербург, 2011.

5. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений / Под редакцией А.А.Уманского. Издание второе переработанное и дополненное в двух книгах. – Кн. 2. – М. : Стройиздат, 1973. – 415 с.

6. Справочник по расчёту собственных колебаний упругих систем / И. В. Ананьев. – ОГИЗ, Гостехиздат, 1946. – 224 с.

7. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б. Г. Коренева и И. М. Рабиновича. – М. : Стройиздат, 1972. – 511 с.

8. Справочник по строительной механике корабля : Т. 3. Динамика и устойчивость корпусных конструкций / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. – Л. : Судостроение, 1982. – 320 с.

9. Суслов В. П. Строительная механика корабля и основы теории упругости / В. П. Суслов, Ю. П. Кочанов, В. Н. Спихтаренко. – Л. : Судостроение, 1972. – 720 с.

10. Постнов В. А. Строительная механика корабля и теория упругости : учеб. для вузов ; Т. 2. : Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек / [В. А. Постнов, Д. М. Ростовцев, В. П. Суслов, Ю. П. Кочанов]. – Л. : Судостроение. – 416 с.

11. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К. : Наук. думка, 1988. – 736 с.

12. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / Пер. с англ. М. З. Кайнера ; под ред. А. М. Лопшица. – М. : Машиностроение, 1961. – 524 с.

**Алексенко В.Л., Скирденко В.О., Шварц С.С.** ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ КОНСТАНТ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ ДИНАМІЧНИМ ВИПРОБУВАННЯМ ПРИЗМАТИЧНИХ ЗРАЗКІВ

Розроблено динамічний спосіб визначення пружних констант призматичних зразків матеріалу. Спосіб використовується для зразків незначних параметрів, коли традиційні методи та обладнання стають незручними. На основі розробленого методу визначено динамічний і статичний модуля Юнга епоксидних композитів.

Ключові слова: динамічний і статичний модуля Юнга, епоксидні композити, механічні константи, метод.

Aleksenko V.L., Skirdenko V.O., Schwartz S.S. DETERMINATION OF THE CONSTANTS OF STRUCTURAL MATERIALS DYNAMIC TEST PRISMATIC SAMPLES

Developed a method for determining the dynamic elastic constants of prismatic specimens. The method is applicable to samples of minor settings when traditional methods and equipment becoming uncomfortable. On the basis of this method are defined static and dynamic Young's modulus of epoxy composites. Keywords: dynamic and static Young's modulus, epoxy composites, mechanical constants, method.

Статтю прийнято до редакції 24.11.2013