ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

УДК 519.95

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АКСИОМАТИКА ГЕОМЕТРИИ

Богданов А.В.,
Европейский университет, Херсонский филиал

В работе показано, что для определения и описания основных свойств геометрических фигур достаточно 4-х переменных, характеризующих свойства пространства. Даны определения ряда неопределяемых в геометрии понятий (множество, прямая, плоскость и т.д.), а также предложена компромиссная формулировка определения параллельности прямых, удовлетворяющая геометрии Евклида и Лобачевского.
Ключевые слова: аксиоматика геометрии, теория вероятности, параллельные прямые.

Введение. Современный аксиоматический метод в геометрии основывается на системе аксиом Гильберта (1899 г.). Все фигуры согласно Гильберту разбиваются на три множества фигур: точки, прямые и плоскости, находящиеся в трёх основных отношениях: "принадлежать", "лежать между" и "конгруэнтности". Вне зависимости от природы понятий они должны удовлетворять 20 аксиомам, разделяющимся на 5 групп. В данной работе все геометрические фигуры разделены по количеству независимых точек (от 1 до 4). Для установления связи между элементами фигур используется теория вероятности и, в частности, правила комбинаторики.

Недостатками современных аксиоматик геометрий А.В. Погорелова, Л.С. Атанасяна и др. [1, 2] является значительная их сложность, необходимость использования многих десятков аксиом, неопределяемых понятий и искусственного разделения и противопоставления геометрий Евклида, в частности его 5-го постулата, и Лобачевского.

В 5-ом постулате Евклида (и если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых (рис. 1, *а*) нет утверждения о прямых на плоскости, которые не пересекаются.

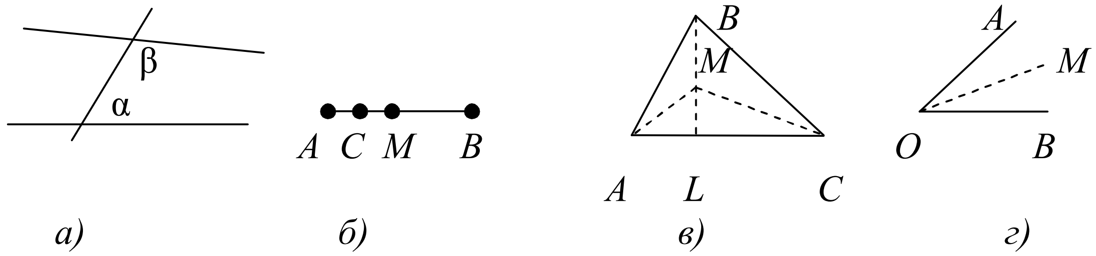

Рисунок 1 – Простейшие прямолинейные фигуры на плоскости:
а – параллельные прямые, *б* – отрезок, *в* – треугольник, *г* – плоский угол

Актуальность предлагаемой работы заключается в значительном уменьшении указанных недостатков аксиоматик геометрии, что особенно важно в эпоху информационных технологий, а также в сокращении времени изучения геометрии, что должно дать значительный экономический эффект.

Целью работы является определение и описание геометрических фигур, а также определение ряда неопределяемых понятий, с помощью четырёх независимых переменных, характеризующих свойства пространства и теории вероятностей. Использование четырёх указанных свойств пространства позволяет значительно сократить число используемых аксиом и неопределяемых понятий (множество, прямая, плоскость и т.д.), а также более логично определить соотношение между геометрией Евклида и неевклидовыми геометриями.

Постановка задачи. Вероятностная аксиоматика использует 3-мерное пространство (вместо 4-мерного пространства, используемого в неевклидовых геометриях), состоящее из точек. Точки обладают 4-мя независимыми свойствами в пространстве: местоположением (кратчайшим расстоянием) и 3-мя независимыми (взаимно перпендикулярными) направлениями и подчиняются вероятностным законам. Совокупность точек (предметов, чисел), обладающих одним или несколькими общими свойствами назовём (основным) множеством. Точки, входящие во множество и отличающиеся между собой только одним свойством, назовём его элементами. Элементы множества считаются одинаковыми и независимыми, т.к. отличаются только одним свойством. Элементы множества, имеющие два разные свойства, одно из которых характерно для всех элементов основного множества, а второе – только для данных элементов, составляют подмножество.

Множество точек, сгруппированное по какому-либо свойству пространства, назовём геометрической фигурой (в дальнейшем – фигурой). Количество независимых переменных (точек), однозначно определяющих фигуру в пространстве, называется её рангом. Количество возможных независимых направлений, образуемых любыми двумя точками фигуры или пространства, в котором рассматривается фигура, называется их мерностью. Мерность фигуры (пространства) всегда на единицу меньше её (его) ранга. Предполагается, что пространство однородно по расстоянию и направлению, т.е. свойства пространства не зависят от взаимного расположения точек и направления.

Независимые элементы фигур назовём действительными фигурами, а зависимые – мнимыми фигурами. Фигуры разделяются на простейшие и сложные. Фигуры, число действительных элементов которых подчиняется правилам комбинаторики, назовём простейшими фигурами. Элементы простейших фигур также являются простейшими фигурами, но меньшего ранга. К простейшим одномерным фигурам относятся: отрезок (его длина), луч, прямая. К двумерным фигурам относятся: плоскость, полуплоскость, треугольник (его периметр и площадь), плоский угол (его величина), окружность, круг (его площадь). К трёхмерным фигурам относятся: полупространство, тетраэдр (его поверхность и объем), двухгранный угол, трёхгранный угол, сфера, полусфера, шар (его площадь поверхности и объём). Фигуры, состоящие из нескольких простейших фигур, назовём сложными фигурами.

Все точки пространства разделяются на обыкновенные и несобственные, находящиеся в бесконечности. Обыкновенные и несобственные точки относятся к разным множествам: первые к множеству рациональных чисел, вторые к множеству, состоящему из двух элементов: $\{0, \infty\}$. Увидеть или измерить фигуры, соответствующие второму множеству, человек принципиально не может.

Фигуры разделяются на замкнутые, в которых существует длина (площадь, объём), и незамкнутые фигуры, неудовлетворяющие данному условию. К простейшим незамкнутым фигурам относятся: луч, прямая, плоскость, полуплоскость, плоский угол, полупространство, двугранный угол, трёхгранный угол. К простейшим замкнутым фигурам относятся: отрезок (его длина), треугольник (его периметр и площадь), тетраэдр (его поверхность и объем), сфера, полусфера, шар (его площадь поверхности и объём).

Точка имеет только одно свойство – местоположение в пространстве. Мерность точки считается равной нулю т.к. она не образует направления в пространстве и имеет ранг равный единице (её размеры бесконечно малые). Граничными фигурами отрезка являются его граничные точки; треугольника – отрезки (стороны); тетраэдра – грани (треугольники). Мнимые точки определяют мнимые элементы фигур, в частности, длину, площадь и объём.

Правила комбинаторики применимы для множеств с одинаковыми и независимыми элементами. В одномерных фигурах это точки, в плоских – вершины и стороны, в 3-мерных – вершины, рёбра и грани. Действительные элементы фигур определяют форму и внешние характеристики фигуры. Сочетание действительных точек определяет вид фигуры, а перестановка – знак "+" и "–" численного значения её величины или её положение в пространстве. При наличии во множествах элементов с двумя и более свойствами число комбинаций элементов перемножается соответствующее число раз.

Решение задачи.

1. Одномерное пространство. Одномерное пространство однозначно определяется двумя независимыми точками. Две обыкновенные точки определяют вектор или отрезок. Отрезок можно определить либо одной его длиной ($C_2^2 = 1$), либо двумя его граничными точками ($C_2^1 = 2$). Отсюда, кратчайшее расстояние между двумя точками – отрезок их соединяющий. Одна обыкновенная и одна несобственная точка однозначно определяют луч. Перестановки точек местами (P_2=2) AB и BA, соответствует двум взаимно противоположным направлениям вектора или луча. Две несобственные точки определяют прямую.

Длина имеет вероятностный характер. Пусть на отрезке *AB* числовой прямой находится некоторая точка *C*, образующая отрезок *AC* (рис. 1, *б*). «Бросая» произвольно точку *M* на отрезок *AB* получим вероятность её попадания на отрезок *AC* равную $P(M) = \dfrac{AC}{AB}$. Если длину *AC* принять за эталон длины (м, см, и т.д.), то длину любого отрезка *AB* можно определить соотношением:

$$\text{длина } AB = \frac{AC}{P(M)} = (\textit{эталон длины}) \times (\textit{численная мера длины}),$$

где $\dfrac{1}{P(M)}$ – численная мера длины. Объединение точек двух отрезков *AM* и *MB* – отрезок *AB* достоверное событие при бросании точки *M* на него. Пересечение множеств точек отрезков *AM* и *MB*, за исключением самой т. *M* – невозможное событие и данные множества составляют противоположные события. Отсюда, сумма расстояний любой точки на отрезке до его концов постоянна по величине для всех точек отрезка и равна его длине. Длина отрезка включает только рациональные числа, т.к. определяется через дробь.

Длина отрезка – это простейшая замкнутая одномерная фигура 2-го ранга, состоящая из множества точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек (концов отрезка) с конечным расстоянием между ними:

1) минимальна по сравнению из соответствующей суммой расстояний всех других точек пространства;

2) постоянна по величине для всех точек отрезка;

3) равна его длине.

2. Плоские фигуры.

1). Плоскость однозначно определяется тремя несобственными и независимыми (не лежащими на одной прямой) точками, т.е. плоскость безгранична. Комбинации 3-х обыкновенных и несобственных точек образуют различные двумерные фигуры, элементами которых могут быть одномерные фигуры и точки.

2). Полуплоскость определяется тремя независимыми точками, одна из которых обыкновенная, а две – несобственные, принадлежащая прямой, ограничивающей данную плоскость.

3). Треугольник (ΔABC) состоит из трёх обыкновенных точек, названных вершинами, поочерёдно соединёнными отрезками, названных сторонами (рис. 1, *в*). Треугольник – простейшая прямолинейная плоская замкнутая фигура. Число сочетаний вершин, сторон и треугольников, однозначно определяющих треугольник, вычисляется формулами комбинаторики, соответственно: $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$. Стороны треугольника являются действительными фигурами, а точки, определяющие его площадь – мнимыми. Их характеристики полностью определяются двумя независимыми свойствами: кратчайшим расстоянием до трёх его сторон и их длинами.

Вероятности нахождения любой внутренней точки треугольника относительно каждой из сторон определяются произведением указанных величин, а сумма произведений – составляет полную группу событий (площадь треугольника). Отсюда, **площадь треугольника** – это простейшая замкнутая двумерная фигура 3-го ранга, состоящая из бесконечного множества точек, сумма 3-х произведений расстояний каждой из которых до его сторон на длину этих сторон:

1) минимальна по сравнению с соответствующей суммой произведений всех других точек плоскости;

2) постоянна для всех точек площади треугольника;

3) равна его удвоенной величине.

Эталон площади вводится аналогично эталону длины. «Бросая» произвольно точку М на высоту, опущенную на одну из сторон треугольника (рис. 1, *в*), получим вероятность её попадания на высоту ML $P_h = \frac{ML}{BL} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta BAC}}$.

Если ΔMAC – эталон площади, то $\frac{1}{P_h}$ – численная мера площади.

4). Плоский угол состоит из двух лучей, имеющих общую обыкновенную точку, называемую вершиной (рис. 1, *г*). Плоский угол однозначно определяется вершиной и двумя сторонами (лучами, векторами, отрезками), называемых его сторонами. Четвёртая переменная точка в плоскости угла является мнимой и может образовывать мнимый луч ОМ. Бросая произвольно мнимый луч ОМ в плоскость угла $\angle$AOB и принимая угол $\angle$AOM за эталонный угол, величина угла определяется выражением: $\angle AOB = \frac{1}{P_y} \angle AOM$, где $\frac{1}{P_y}$ – численная мера угла.

Плоский угол – простейшая плоская прямолинейная незамкнутая фигура. Величина плоского угла – это простейшая двумерная фигура 3-го ранга, состоящая из бесконечного множества лучей, образующих углы с общей вершиной и сторонами исходного угла, сумма величин которых:

1) минимальна по сравнению с соответствующей суммой углов любых других лучей с заданной вершиной и сторонами;

2) постоянна для всех мнимых лучей;

3) равна величине исходного угла.

5). Параллельными прямыми на плоскости называются прямые, имеющие одну общую несобственную точку. Одной действительной фигуры, содержащей две прямые, которые не пересекаются (т.е., независимы) на одной плоскости в предлагаемой модели не существует, т.к. каждая из прямых определяется двумя независимыми точками, а на плоскости фигура может иметь не более трёх действительных (независимых) точек. Данное определение параллельности прямых совпадает с аналогичным определением, данным в проективной геометрии и не противоречит 5-му постулату Евклида.

В 5-м постулате Евклида утверждается, что в бесконечности прямые на плоскости могут пересекаться (т.е., введено множество точек {0, ∞}), но не говорится, что они не должны пересекаться. О двух отрезках, один из которых является мнимым, можно говорить, что они параллельны, например противоположные стороны параллелограмма, если при пересечении их третьим отрезком (прямой) по одну сторону образуются внутренние углы, сумма которых равна 180°.

3. Трёхмерное пространство.

1). Трёхмерное пространство определяется четырьмя несобственными и независимыми (не лежащими в одной плоскости) точками, т.е. трёхмерное пространство безгранично. Комбинации 4-х обыкновенных и несобственных точек образуют различные 3-х мерные фигуры, элементами которых могут быть двумерные и одномерные фигуры.

2). Полупространство определяется четырьмя независимыми точками, тремя несобственными и одной – обыкновенной, принадлежащей плоскости, ограничивающей данное пространство.

3). Скрещивающиеся прямые образуются 4-мя несобственными точками, через каждые две из которых проведены прямые линии. Кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина перпендикуляра, соединяющая их (рис. 2, *а*).

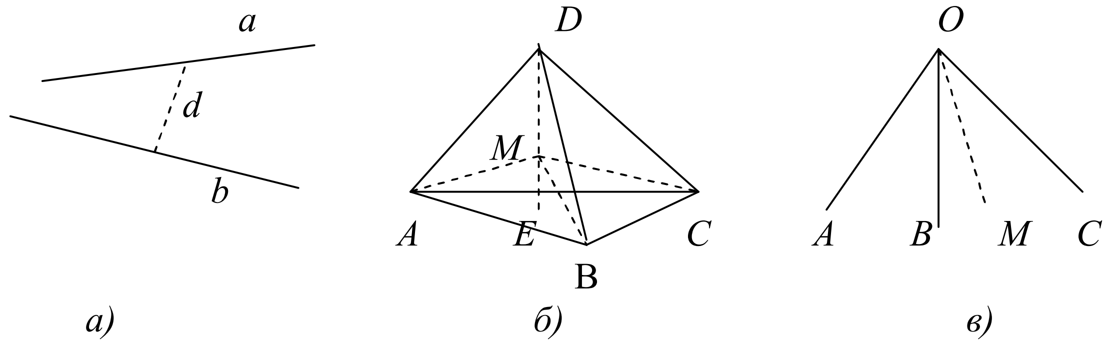

Рисунок 2 – Простейшие прямолинейные фигуры 3-мерного пространства: *а* – скрещивающиеся прямые, *б* – тетраэдр, *в* – трёхгранный угол

4). Тетраэдр образуется четырьмя обыкновенными точками, любые три из которых образуют грани (рис. 2, *б*). Число сочетаний вершин, рёбер, граней и тетраэдров, однозначно определяющих тетраэдр, равно, соответственно: $C_4^1 = 4$; $C_4^2 = 6$; $C_4^3 = 4$; $C_4^4 = 1$. Каждая внутренняя точка тетраэдра – его объём полностью определяется суммой расстояний до каждой из граней, умноженных на площадь этих граней и равняется утроенному объёму тетраэдра. Объём тетраэдра имеет вероятностный характер. Произвольная точки М внутри тетраэдра образует четыре тетраэдра, сумма объёмов которых равна объёму исходного тетраэдра или полную группу событий. Пересечение множеств точек объёмов данных тетраэдров, за исключением точек, входящих в плоскости сечения, невозможное событие. Бросая произвольно точку М на высоту, опущенную на одну из граней тетраэдра (ΔABC) получим, что вероятность её попадания в объём тетраэдра, определяется соотношением:

$$P_V = \frac{ME}{DE} = \frac{V_{MABC}}{V_{DABC}}.$$

Если V_{MABC} принять за эталон объёма, то $\frac{1}{P_V}$ – называется численной мерой объёма.

Объём тетраэдра – это простейшая замкнутая прямолинейная 3-мерная фигура 4-го ранга, состоящая из бесконечного множества точек, сумма произведений расстояний от которых до его граней на площадь этих граней:

1) минимальна по сравнению с соответствующей суммой произведений всех других точек плоскости;

2) постоянна для всех точек тетраэдра;

3) равна утроенному его объёму.

5). Двугранный угол состоит из четырёх несобственных точек, две из которых образуют прямую, ограничивающую две полуплоскости и называемую его ребром.

6). Трёхгранный угол состоит из одной обыкновенной и трёх несобственных точек, образующих три пересекающиеся в одной точке плоскости. Трёхгранный угол однозначно определяется вершиной и тремя рёбрами (лучами, отрезками) или тремя плоскостями, имеющими одну общую точку (рис. 2, *в*). Пятая независимая переменная (не лежащая ни на одной из граней трёхгранного угла) точка образует мнимые углы, подчиняющиеся вероятностным законам.

Величина трёхгранного угла – это простейшая трёхмерная фигура 4-го ранга, состоящая из бесконечного числа плоских углов с общей вершиной и одной из рёбер исходного угла, сумма величин которых:

1) минимальна по сравнению с соответствующей суммой углов любых других лучей с заданной вершиной;

2) постоянна для всех мнимых лучей;

3) равна величине исходного угла.

7). Прямая, пересекающая плоскость – три независимых точки образуют плоскость, а четвёртая образует с одной из независимых точек плоскости прямую.

Двух непересекающихся плоскостей или непересекающихся прямой и плоскости, определяемых в геометрии Евклида, как параллельные, в данной модели не существует, т.к. сумма независимых точек, их образующих, больше четырёх. Параллельными назовём плоскости (или плоскость и прямую), линия (точка) пересечения которых находится в бесконечности.

Выводы.

1. Соответствие числа элементов (составляющих) геометрических фигур, правилам комбинаторики подтверждает, что их число определяется

вероятностными законами и для однозначного их определения достаточно 4-х независимых переменных.

2. С помощью теории вероятности в статье даны определения основных геометрических фигур, а также определены такие неопределяемые понятия, как прямая, плоскость, множество и т.д.

3. Определение параллельности прямых, как прямых на плоскости, пересекающихся в бесконечности, удовлетворяет как самому определению Евклида, так и выводам проективной геометрии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровик В.Н., Яковець В.П. Курс вищої геометрії: навчальний посібник. – Суми: ВТД "Університетська книга", 2004. – 464 с.

2. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Универсальный справочник по математике. – М.: Лист Нью, 2003. – 544 с.

Богданов О.В. ЙМОВІРНОСНА АКСІОМАТИКА ГЕОМЕТРІЇ

У роботі показано, що для визначення й опису основних властивостей геометричних фігур достатньо 4-х перемінних, які характеризують властивості простору. Дано визначення ряду невизначуваних у геометрії понять (множина, пряма, площина тощо), а також запропоновано компромісне формулювання визначення паралельності прямих, що задовольняє геометрії Евкліда і Лобачевського.

Ключові слова: аксіоматика геометрії, теорія ймовірностей, паралельні прямі.

Bogdanov A.V. PROBABILISTIC AXIOMATIC GEOMETRY

In the paper it is shown that to define and describe major properties of geometrical figures four variable is enough, characterizing space properties. It is given some indefinable in geometrics notions (multitude, straight line, platitude and so on), and also given evaluation of parallel straight lines, that suits to Evcklid and Lobachevskiy geometrics.

Key words: axiomatic geometry, probability theory, parallel lines.